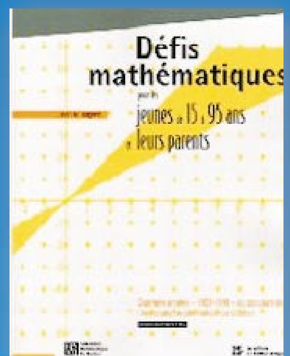
Cet extrait numérique de l’ouvrage *Défis mathématiques* est distribué gratuitement.



les éditions
Le Griffon d’argile
www.griffondargile.com
1 800 268-6898

Préface

Ce petit livre s'adresse à toute personne cultivée de bonne volonté et est dédié, comme l'a fait Schubert pour l'une de ses œuvres les plus émouvantes, « à tous ceux qui y prendront plaisir ». Il n'y a pas en effet de culture sans désir ni sans plaisir, et la culture scientifique ne fait pas exception à cette règle.

Pour le citoyen qui veut parfaire ses connaissances dans le domaine de la littérature de la musique ou des arts, les outils ne manquent pas, bibliothèques, concerts, musées, expositions. Il n'en est pas de même pour les mathématiques qui sont souvent victimes de préjugés voulant qu'elles soient trop techniques et spécialisées pour faire partie des préoccupations culturelles du citoyen en général. Or, comme le français ou l'anglais, les mathématiques sont une langue qui peut être parlée par tout le monde, une langue faite pour poser et résoudre des problèmes, une langue qui permet d'exprimer des idées et même la beauté qui se manifeste lorsque l'on perçoit un ordre dans la complexité d'une situation. L'ambition de ce livre est de contribuer à l'intégration de la culture mathématique et scientifique à la culture générale du citoyen.

Plus précisément, ces *Défis mathématiques* sont constitués de problèmes amusants posés dans le *Concours mathématiques du Québec* de 1959 à 1998 destinés aux élèves du deuxième cycle du secondaire pour mettre en valeur leurs talents en mathématiques. Il s'agit de problèmes qui ne font pas appel à des connaissances spécialisées mais plutôt au sens logique et à l'imagination qui sont, comme on le sait, des qualités très répandues chez les jeunes et chez les adultes qui ont le désir de rester jeune. On doit aborder ces défis avec un crayon et du papier … et une poubelle pour les essais infructueux ! La joie viendra d'être parvenu à une solution ou à défaut à la compréhension de la solution donnée dans la deuxième partie du livre. On éprouvera parfois un véritable plaisir esthétique, un peu comme si on créait ou lisait un poème mathématique.

Bien évidemment, le livre rendra aussi des service dans le milieu scolaire là où la culture prend racine. Il servira aux professeurs de l'ordre secondaire qui veulent préparer des élèves au *Concours de l'Association mathématique du Québec*, et aux élèves qui sont assez autonomes pour travailler par eux-mêmes. M. Turgeon m'a confié qu'en mentionnant les jeunes de quinze ans dans son titre, il comptait que des jeunes de moins de quinze ans s'attaqueraient eux aussi aux problèmes. Il pourraient ensuite se vanter d'avoir résolu des problèmes destinés aux « quinze ans et plus » !

Nous devons toute notre reconnaissance à monsieur Jean Turgeon qui a accompli un véritablement travail de moine en rassemblant tous ces problèmes, les classant, les choisissant vérifiant minutieusement toutes les solutions et les présentant de façon agréable. Il faut mentionner aussi que, depuis près de trente ans, c'est lui qui, avec son équipe de l'Université de Montréal et de l'Université du Québec à Montréal, a animé et géré les *Concours mathématiques du Québec* pour le secondaire. Nous avons donc grand plaisir à remercier M. Jean Turgeon d'avoir mis à la disposition du grand public et du milieu scolaire ce patrimoine accumulé depuis quarante ans par la communauté mathématique du Québec, patrimoine que nous offrons à titre de contribution à la culture générale de nos concitoyens.

Bernard Courteau, président
Association mathématique du Québec

Table des matières

Avant-propos

Les *Défis mathématiques* mis ici à la disposition du grand public ont d'abord été posés, en général, à des étudiants de Secondaire 4 et 5 à l'occasion du *Concours de l'Association mathématique du Québec*, organisé en collaboration étroite avec la *Société mathématique du Canada*.

Ce concours a eu lieu chaque année depuis 1959. La première année, il s'adressait uniquement aux élèves de la région de Montréal, mais dès 1960 on l'a étendu à toute la Province de Québec.

Le public cible a varié beaucoup pendant les onze premières années du concours. En 1959 il était bilingue, avec un nombre égal d'institutions d'enseignement de langue française et de langue anglaise participantes. Dans le langage de l'époque, on disait : « Le concours est accessible à tous les étudiants qui complètent des études équivalentes à l'immatriculation junior ». Ces étudiants étaient ceux de onzième année des écoles de langue anglaises, de douzième année des écoles de langue françaises et de Belles-Lettres des collèges classiques. En 1963, 1966 et 1967, les collèges classiques ont tenu leur propre concours, destiné aux étudiants de Philosophie I et de Philosophie II. Certains de ces collèges se sont transformés en Cégeps en 1968, de sorte qu'en 1970 le public du concours était composé des élèves de Secondaire 4 et 5 et de la première année de Cégep. Au début des années soixante-dix, le *Concours mathématique du Québec* a perdu une partie de sa clientèle quand on a institué un concours propre aux Cégeps et un autre concours propre aux écoles de langue anglaise. La clientèle étudiante visée par le *Concours mathématique du Québec* est demeurée stable depuis cette époque : les élèves du secondaire 4 et 5 francophone.

C'est à l'automne 1969 que le regretté Professeur Roland Brossard m'a demandé de lui succéder comme président du *Concours mathématique du Québec*. Moi qui n'avais jamais participé à ce concours, ayant terminé mes études secondaires trop tôt, en 1956, j'en ai la responsabilité encore aujourd'hui. Mon ami, M. Paul Arminjon, m'a remplacé en 1981 et en 1988, alors que je prenais des congés sabbatiques. Je prends donc la responsabilité de vingt-sept des quarante années de questionnaires contenus dans ce livre.

Il m'a paru que ce livre serait plus utile si les problèmes étaient présentés par thèmes, plutôt que selon l'ordre chronologique. Cet arrangement m'a amené à reprendre la formulation de la plupart des énoncés des problèmes et de leurs solutions, et à rédiger une introduction à chacun des vingt-cinq chapitres. Ces introductions s'adressent au lecteur qui n'a pas touché à des mathématiques depuis longtemps, pour lui fournir les notions pertinentes aux problèmes du chapitre en question. J'ai aussi prolongé rétroactivement la tradition, établie en 1975, d'attribuer un titre à chacun des problèmes. On trouvera à la fin du livre un index des problèmes par titres.

On trouvera aussi à la fin du livre un index des problèmes par années. Ainsi un adulte qui a participé au concours pourra retrouver, avec leurs solutions ces énigmes sur lesquelles il a bûché autrefois pendant trois longues heures. Chaque énoncé est suivi de l'indication, entre crochets, de l'année où ce problème a été posé, et de son rang dans le questionnaire. Les questionnaires des collèges classiques sont caractérisés par les lettres *cc*. Ainsi [1966cc,7] indique qu'il s'agit du problème 7 du concours des collèges classiques de 1966.

En consultant l'index des problèmes par années, on constatera qu'exactement vingt et un problèmes ont été omis. Dans quatorze cas, il s'agit de problèmes portant sur le calcul différentiel, que l'on étudiait dans les deux dernières années du cours classique, mais qui n'est pas au programme de l'ordre secondaire. Six autres cas portent sur des questions qui demandent des connaissances de trigonométrie ou de théorie des logarithmes que j'ai jugées trop spécialisées. La question [1974,2], que j'avais moi-même composée et que j'aimais bien, était la suivante.

> Les œuvres musicales très longues enregistrées sur disques sont habituellement réparties sur les faces des disques de telle façon qu'on puisse faire jouer l'œuvre sur un

tourne-disque automatique de capacité suffisante avec une seule interruption, au milieu de l'œuvre, pour retourner l'ensemble des disques. Ainsi l'opéra *Casse-pieds* de Tom Breakfoot est enregistré sur 207 disques 45 tours ! Mon air favori, « Que le temps est long ! » est chanté *au verso* de la face 350. Dire le numéro de la face qui le contient.

On m'a conseillé de l'omettre parce que les jeunes d'aujourd'hui n'ont jamais entendu parler de disques enregistrés des deux côtés !

Remerciements

Il convient ici de remercier les personnes qui ont contribué au succès du concours depuis ses débuts.

Pour la période que va de 1959 à 1969, le *Bulletin A.M.Q.* mentionne les noms suivants (en ordre alphabétique) : Maurice l'Abbé, Roland Brossard, Gabriel Garneau, Hector Gravel, Laurent Portugais, Pierre Robert et Alexis Zinger.

Depuis 1970, je n'aurais jamais réussi à organiser le concours sans l'aide de nombreux collaborateurs. Le plus important d'entre eux fut sans doute Gilbert Labelle. On lui doit presque chaque année, depuis 1974, au moins deux ou trois problèmes, parmi les plus intéressants et originaux. Les années qui font exception sont celles où un de ses neveux participait au concours; comme ce neveu se classait premier, Gilbert ne voulait pas être au courant des problèmes avant la tenue du concours.

Matthieu Dufour est, depuis 1991, l'expert en alphamétiques et en acronymes (Amoth Dieufutur pour Matthieu Dufour, Abel Belgrillet pour Gilbert Labelle et Anne Grujote pour Jean Turgeon). En janvier 1998 il avait suggéré l'alphamétique

$$PANNES \times 5 = VERGLAS,$$

dont l'unique solution est $952\,270 \times 5 = 4\,761\,350$. Comme le concours avait lieu le 5 février, tout de suite après les désastreuses tempêtes de verglas, nous avons décidé ensemble de ne pas inclure ce joli problème.

Il serait trop long de parler de tous les collaborateurs comme ils le méritent. En voici une liste partielle, en ordre alphabétique: Mario d'Angelo, Paul Arminjon, Aïda Barsoum, Khalid Benabdallah, Robert Brassard, Bram Broer, André Chagnon, Hélène Descostes, Denise Deslauriers, Pierre Doutre, Anne Fearnley, Raymond Forget, Gilles Fournier, Reine Fournier, Denyse Gagnon-Messier, Yves Gaudreau, Florence Grandchamp, Kamel Guirgis, Jacques Labelle, Jean-Marie Labrie, Serge Maurer, André Paradis, Denis Paradis, Hidemitsu Sayeki et Kali Spathoni.

Il convient de remercier aussi le *Département de mathématiques et de statistique* de l'Université de Montréal, pour avoir mis chaque année, depuis 1959, une partie du temps d'une secrétaire au service du *Concours de l'A.M.Q.* Ces secrétaires, Mme Yolande Corbeil-Leblanc, de 1970 à 1975, et Mme Thérèse Ouellet, de 1976 à nos jours, ont fourni un travail considérable, depuis l'envoi de la publicité en décembre, jusqu'à l'envoi des résultats et des solutions vers le mois d'avril, en passant par les diverses impressions, l'envoi et la réception des cahiers, et ainsi de suite. Elles se sont chargées aussi de trouver des correcteurs, parmi les étudiants de deuxième et troisième cycles du département.

Il est important d'ajouter que le *Société mathématique du Canada* a soutenu financièrement le *Concours de l'Association mathématique du Québec* non seulement à ses débuts, mais pendant toute son existence.

Pour la rédaction de ce livre, Mme Josée Deslongchamps m'a servi de secrétaire très compétente, tant pour le traitement de texte et la mise en pages que pour la qualité du français et même, parfois, des raisonnements mathématiques. Le Fr. Jean-Marie Labrie, F.E.C., le P. Ernest Richer, S.J. et M. Maurice Brisebois ont passé des heures à examiner mon manuscrit à la recherche de coquilles et autres fautes. Bernard Courteau a bien voulu écrire une préface, à titre de président de l'*Association mathématique du Québec*. J'ai aussi bénéficié d'une subvention de la Faculté des Arts et des Sciences de l'Université de Montréal.

Grand merci !

Jean M. Turgeon

1 Systèmes d'équations

Le *Concours mathématique du Québec* a posé douze fois des problèmes comportant des systèmes de deux équations. Dans les sept premiers ci-dessous, les deux équations sont linéaires et il faut d'abord les construire à partir de situations décrites. Dans le cas de *M. Beauchamp et le caissier distrait*, il y a divers cas à considérer, qui mènent chacun à son propre système d'équations.

Les cinq derniers problèmes sont des variations intéressantes sur le même thème. Le système comporte des termes du second degré, ou une valeur absolue, ou dépend d'un paramètre. Dans le problème 9, une des équations est remplacée par une inégalité. Pourtant les méthodes de solution demeurent toujours élémentaires.

Problèmes

1.1 Les fractions partielles

Trouver les valeurs des paramètres A et B qui satisfont à l'identité

$$\frac{6x+7}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1}.$$

[1959,3a]

1.2 Bonus : un voyage en Europe

Un employé est engagé aux conditions suivantes : 5 250$ de salaire et un voyage en Europe pour un an de travail. Après 7 mois d'emploi, il démissionne. Il a alors gagné 2 725$ et on lui paie son voyage en Europe. Quelle est la valeur de ce voyage ? [1967,1]

1.3 Le pot de miel et le pot de pétrole

Un pot de miel pèse cinq cents grammes. Le même pot rempli de pétrole pèse trois cent cinquante grammes. Si le miel est deux fois plus lourd que le pétrole, que pèse le pot vide ? [1987,1]

1.4 Ceci et cela

Ceci est huit fois plus grand que cela, mais si j'ajoute ceci à cela j'obtiens trois fois le carré de cela. Qu'est-ce que ceci et cela ? [1989,1]

1.5 L'amoureux perplexe

Chez un fleuriste, une marguerite se vend 1,99$ et une rose, 3,49$, taxes comprises. Un client arrive, avec dans sa poche cinquante pièces de monnaie, mais seulement des pièces de un cent, de dix cents, de vingt-cinq cents et d'un dollar. Est-il possible qu'il ait exactement l'argent pour acheter l'une ou 1'autre des deux fleurs ? [1994,2]

1.6 M. Beauchamp et le caissier distrait

Un caissier distrait a interverti le nombre de dollars et le nombre de cents en encaissant le chèque de monsieur Beauchamp. Après avoir acheté un timbre de 5 cents, monsieur Beauchamp s'est aperçu qu'il lui restait exactement le double du montant original de son chèque. Quel était le montant du chèque de monsieur Beauchamp ? [1973,2]

1.7 Blanche Neige et les sept petits entiers

(a) Identifier les sept entiers positifs distincts qui ont la propriété que les sept sommes de six d'entre eux à la fois sont 57, 58, 62, 65, 66, 67 et 69.

(b) Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres connus. Trouver $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si

$$\begin{aligned}
0\,x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= a_1,\\
x_1 + 0\,x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= a_2,\\
x_1 + x_2 + 0\,x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= a_3,\\
&\;\;\ldots\\
x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + 0\,x_{n-1} + x_n &= a_{n-1},\\
x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + 0\,x_n &= a_n.
\end{aligned}$$

[La partie (a) provient de 1997,1 et la partie (b) provient de 1966cc,8]

1.8 Un système avec carrés et produit

Trouver toutes les paires de valeurs de x et de y qui satisfont au système

$$x^2 + y^2 = 40 \text{ et } 3\,x + 3\,y = 2\,xy.$$ [1960,6b]

1.9 Une équation et une inéquation

Décrire en fonction du paramètre m l'ensemble des solutions du système constitué de l'équation

$$2\,x - 3\,y = 5$$

et de l'inéquation

$$m\,x + (m-1)\,y > 2.$$ [1962,2]

1.10 Le système qui dépend d'un paramètre

Trouver, en fonction du paramètre k, les valeurs de x et de y qui satisfont aux équations

$$x + (k-2)\,y = 1 \text{ et } (k+2)\,x - 3\,y = 1$$

(a) lorsque k n'est ni 1, ni –1.

(b) lorsque $k = 1$.

(c) lorsque $k = -1$. [1965,1]

1.11 Valeur absolue de *x*

Trouver toutes les valeurs de x et de y qui satisfont aux deux équations

$$3\,|x| + 4\,y = 11 \text{ et } -5\,x + 7\,y = 9,$$

où $|x|$ désigne la valeur absolue de x. [1969,2]

1.12 Le plus grand

Soit x et y deux nombres positifs différents. Parmi les deux nombres

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} \text{ et } \frac{x^2-y^2}{x-y},$$

lequel est le plus grand ? [1959,5a]

2 Décompositions en facteurs

Les quatorze premiers problèmes de cette section portent sur les entiers, les huit autres sur les polynômes.

Pour résoudre les premiers il sera utile de se rappeler les principes suivants.

1. Un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est divisible par 2.

2. Un entier est divisible par 4 si le nombre constitué de ses deux premiers chiffres (celui des unités et celui des dizaines) est divisible par 4.

3. Un entier est divisible par 8 si le nombre constitué de ses trois premiers chiffres est divisible par 8.

4. En général, un entier est divisible par 2^n si le nombre constitué de ses n premiers chiffres est divisible par 2^n.

5. Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

6. Un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

7. Un entier est divisible par 5 si son premier chiffre est 0 ou 5.

8. Un entier est divisible par 10 si son premier chiffre est 0.

Les problèmes 2.7 et 2.8 fournissent des critères de divisibilité par les nombres 11 et 7.

La proposition suivante servira dans le traitement de polynômes.

9. Théorème du reste. Le reste de la division d'un polynôme $p(x)$ par $x - a$ est $p(a)$.

Tous les problèmes traitant de polynômes ont été posés avant 1971.

Problèmes

2.1 Un multiple de 10

Montrer que le nombre $43^{43} - 17^{17}$ est divisible par 10. [1960,11]

2.2 Produit et somme

Démontrer que, si la somme de deux nombres positifs est 2, alors leur produit est inférieur ou égal à 1. [1961,5a]

2.3 Carré d'un impair

Démontrer que le carré d'un impair est toujours égal à un multiple de 8, plus 1. [1961,5b]

2.4 Un nombre impair de diviseurs

Démontrer qu'un nombre n possède un nombre impair de diviseurs si, et seulement si, n est un carré parfait. [1961,9]

2.5 Les multiples de 24, plus 1

Soit n un entier qui n'est divisible ni par 2, ni par 3. Démontrer que n^2 est un multiple de 24 augmenté d'une unité. Exemple : $7^2 = 2 \times 24 + 1$. [1962,4]

2.6 Les multiples de 360

Soit n un entier plus grand que 3 et non divisible par 3. Démontrer que $n^5 - 5n^3 + 4n$ est un multiple de 360. [1963cc,7]

2.7 Reste de la division par 11

Donner une méthode de calculer rapidement le reste de la division par 11 d'un entier quelconque. Appliquer cette méthode au nombre

$$M = 529\ 109\ 358\ 633\ 435\ 082\ 180\ 444.$$ [1963cc,12a]

2.8 Reste de la division par 7

Vous avez une calculatrice électronique à huit chiffres et je vous demande : quel est le reste de la division de 51 929 708 par 7 ? Vous divisez le nombre donné par 7 et vous obtenez 7 418 529,7. Il y a donc un reste non nul. La multiplication par 7 de la partie entière du résultat donne 51 929 703. Le reste est donc 5.

Donner une méthode pour calculer le reste de la division par 7 d'un nombre comme

$$M = 956\ 851\ 742\ 963\ 789\ 324,$$

qui est trop grand pour être traité directement par la calculatrice à huit chiffres. [1963cc,12b]

2.9 Toujours un multiple de 576

Démontrer que, pour tout entier positif n, le nombre $5^{2n+2} - 24n - 25$ est un multiple de 576.[1964,4]

2.10 Un exercice en formation

Quel est le plus petit nombre d'athlètes pouvant marcher en douze formations rectangulaires différentes ? Nous supposons

(1) qu'une ligne unique ou une colonne unique constituent des formations rectangulaires admissibles,

(2) que la permutation des athlètes à l'intérieur d'une formation rectangulaire ne modifie pas celle-ci,

(3) qu'une formation rectangulaire ne comprend qu'un seul rectangle. [1971,5]

2.11 Les treize sans diviseurs

Trouver un sous-ensemble S de 1'ensemble $\{1,2, \ldots,26\}$ tel que

(a) S contient treize éléments,

(b) le nombre 4 est dans S et

(c) aucun élément de S ne divise un autre élément de S. [1982,6]

2.12 Les nombres seconds

Dans la suite des nombres premiers, qui commence par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, … il existe des couples $(p, p+2)$ dont les deux éléments, p et $p+2$, sont premiers. Exemples :

$$(3,5), (5,7), (11,13), (17, 19), (29,31), \ldots .$$

Considérons maintenant la suite des nombres $p+1$, où $(p, p+2)$ est un couple de nombres premiers :

$$4, 6, 12, 18, \ldots .$$

Exception faite du plus petit de ces nombres, 4 , tous sont divisibles par 6. En effet, dans toute suite de la forme $p, p+1, p+2$, il y a un nombre qui est divisible par 3 et au moins un qui est divisible par 2. Comme p et $p+2$ sont premiers, $p+1$ est divisible par 2 et par 3, donc par 6.

Effectuant la division par 6 , nous obtenons la suite des *nombres seconds*, les nombres n tels que $6n-1$ et $6n+1$ constituent un couple de nombres premiers :

$$1, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 17, 18, 23, 25, 30, 32, 33, \ldots .$$

Montrer que si la différence entre deux nombres seconds consécutifs est 1 alors, à l'exception du couple (1,2), leur somme est divisible par 5. [1985,7]

2.13 Les trente-six diviseurs

Trouver le plus petit entier positif qui a exactement trente-six diviseurs. [1990,7]

2.14 La fraction à simplifier

Simplifier la fraction $\dfrac{1\,358\,024\,701}{1\,851\,851\,865}$. [1995,1]

2.15 Décomposer en facteurs (1)

Décomposer en facteurs l'expression $p^3 - g^3 + (p^2 - g^2) + pg\,(p - \mathrm{g})$. [1959,1a]

2.16 Décomposer en facteurs (2)

Décomposer en facteurs l'expression

$$abc + bcx + acy + cxy + abz + bxz + ayz + xyz.$$ [1963,1]

2.17 Décomposer en facteurs (3)

Décomposer en facteurs l'expression $x^8 - 81$. [1970,1a]

2.18 La décomposition appliquée

(a) Décomposer en facteurs l'expression $(ac - bd)^2 + (ab + cd)^2$.
(b) Utiliser ce résultat pour exprimer le produit de 17 par 401 comme somme de deux carrés. [1959,1b]

2.19 La fraction toujours irréductible

Démontrer que la fraction $\dfrac{10\,n + 3}{15\,n + 4}$ est irréductible, quel que soit l'entier n. [1963,8]

2.20 Un facteur pour tout *n*

Montrer que $(x - 1)^2$ est un facteur de $x^n - n\,(x - 1) - 1$ où n est un entier positif. [1966,3]

2.21 Le diviseur

Soit z, n et k des nombres entiers positifs tels que $z \neq 1$ et $n \leq k$. Démontrer que $z^n - 1$ divise $z^{k!} - 1$. [1968,2]

2.22 Division de polynômes

Trouver le reste de la division du polynôme

$$p(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 4\,x - 2$$

par $x + 2$. [1970,1b]